Filozofia Nauki
Rok XVII, 2009, Nr 1(65)

Patryk Dziurosz-Serafinowicz

Subiektywne prawdopodobieństwo i problem przeliczalnej addytywności

Dzięki pracom Bruno de Finettiego oraz Franka P. Ramseya matematyczne pojęcie prawdopodobieństwa zyskało filozoficzną interpretację nazywaną subiektywną bądź też personalistyczną. Dołączyła ona do takich teorii interpretujących prawdopodobieństwo jak logiczna (John M. Keynes, Jan Łukasiewicz), częstościowa (Hans Reichenbach, Richard von Mises) oraz skłonnościowa (Karl Popper). W myśl subiektywnej interpretacji prawdopodobieństwo zajścia jakiegoś zdarzenia lub prawdziwości jakiegoś zdania jest stopniem przekonania podmiotu. Ramsey oraz de Finetti wykazali poprzez tak zwany argument z Zakładu Holenderskiego (*Dutch Book Argument*), iż stopnie przekonań, aby były racjonalne, powinny być zgodne z aksjomatami rachunku prawdopodobieństwa zaproponowanymi w 1933 roku przez Andrieja N. Kołmogorova w jego słynnych *Grunbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung*. Takie stopnie są wówczas koherentne. De Finetti interpretując prawdopodobieństwo subiektywnie podał w wątpliwość jeden z klasycznych aksjomatów rachunku prawdopodobieństwa, mianowicie przeliczalną addytywność. Tak zwana *loteria de Finettiego* miała wykazać, iż przeliczalna addytywność nie znajduje uzasadnienia na gruncie subiektywnej interpretacji jako aksjomat rachunku prawdopodobieństwa, a w konsekwencji nie musi być spełniona jako jeden z wymogów koherencji stopni przekonań. W artykule niniejszym pokazuję, iż argument z *loterii de Finettiego* nie wyklucza możliwości uzasadnienia, środkami subiektywnej teorii prawdopodobieństwa, aksjomatu przeliczalnej addytywności. Z tezą tą dają się pogodzić co najmniej dwa stanowiska: pierwsze — mówiące, iż można uzasadnić przeliczalną addytywność i pozostawić *loterię de Finettiego* jako szczególny przypadek, w którym ona nie zachodzi, oraz drugie — opowiadające się za możliwością uzasadnienia owego aksjomatu i tym samym za możliwością odrzucenia *loterii de Finettiego*, jako nieracjonalnej. Ta druga możliwość, reprezentowana przede wszystkim przez Jona Williamsona, wydaje się bardziej zgodna z głównymi założeniami subiektywistów, mimo pewnych wątpliwości wysuwanych pod jej adresem.

1. PROBABILISTYCZNA KOHERENCJA I ARGUMENT Z ZAKŁADU HOLENDERSKIEGO

Budując subiektywne rozumienie prawdopodobieństwa, Ramsey był świadomy trudności związanych z zaproponowaniem poprawnego sposobu mierzenia takich prawdopodobieństw. W szczególności odrzucił on utożsamianie stopni przekonań z intensywnością uczucia towarzyszącego przekonaniu oraz mierzenie owej intensywności uczucia jakimś rodzajem introspekcji. Zdaniem Ramseya możemy mieć przecież silne przekonanie o czymś, któremu nie towarzyszy żadne uczucie.[1] Ostatecznie Ramsey, a za nim de Finetti uznali, iż racjonalnie jest utożsamiać stopień przekonania podmiotu z gotowością do przyjęcia zakładu przedstawianą w postaci tak zwanego ilorazu zakładu.[2]

Przypuśćmy zatem, iż dwa podmioty X i Y zakładają się o prawdziwość jakiegoś zdania A. Podmiot X stawia 1$, przeciwko 3$ postawionym przez podmiot Y, za prawdziwość tego zdania. Stawką S tego zakładu są więc 4 dolary. Stopień przekonania podmiotu X lub Y jest wówczas ilorazem zakładu q dla X lub dla Y (*betting quotinet*), czyli stosunkiem stawki każdego z zakładających się podmiotów do ogólnej sumy stawek. Dla X wynosi więc $\frac{SA}{SA+SB}$, czyli ¼, dla Y zaś $\frac{SB}{SA+SB}$, czyli ¾.[3]

Korespondencja zachodząca między stopniami przekonań a ilorazami zakładów stanowi istotne założenie, przedstawionego niezależnie przez Ramseya i de Finettie-

[1] Ramsey pisze nastepująco: *This view would be very inconvenient, for it is not easy to ascribe numbers to the intensities of feelings; but apart from this it seems to me observably false, for the beliefs which we hold most strongly are often accompanied by practically no feeling at all; no one feels strongly about things he takes for granted* (F. P. Ramsey, *Truth and Probability*, [w]: *Philosophical Papers*, ed. D.H. Mellor, Cambridge 1990, Cambridge University Press, s. 65).

[2] Ramsey ujmuje związek między zakładem a stopniem przekonania następująco: *The old established way of measuring a person's belief is to propose a bet, and see what are the lowest odds which he will accept. This method I regard as fundamentally sound* (F. P. Ramsey, *Truth…*, s. 68). Doktryna de Finettiego, znana powszechnie jako operacjonizm w stosunku do stopni przekonań, może być przedstawiona za pomocą następującego fragmentu: *The probability P(E) that You attribute to an event E is therefore the certain gain p which You judge equivelent to a unit gain conditional on the occurence of E: in order to express it in a dimensionally correct way, it is preferable to take pS equivalent to S conditional on E, where S is any amount whatsover, one Lira or one million, $20 or £75* (B. de Finetti, *Theory of Probability*, vol. 1, New York 1990, Wiley, s. 75).

[3] Możemy przyjąć także, iż iloraz zakładów q odpowiada stosunkowi szans q :$(1 - q)$. W konsekwencji iloraz zakładów ¾ (0.75) odpowiada stosunkowi szans 75:25, co z kolei jest równe stosunkowi 3:1, iloraz zaś zakładów ¼ (0.25) odpowiada stosunkowi szans 25:75, czyli 1:3.

go, argumentu z Zakładu Holenderskiego za tak zwaną koherencją stopni przekonań, czyli wymogiem racjonalności stopni przekonań mówiącym, iż stopnie przekonań powinny być zgodne z aksjomatami rachunku prawdopodobieństwa.[4] Uzasadnieniem tego wymogu jest argument z Zakładu Holenderskiego. Argument ten mówi, iż podmiot narażony jest na przyjęcie jako uczciwego takiego systemu zakładów, który gwarantuje mu pewną przegraną, niezależnie od wyniku zakładu wtedy i tylko wtedy, gdy stopnie przekonań takiego podmiotu nie są zgodne z aksjomatami rachunku prawdopodobieństwa. Taki system zakładów nazywamy Zakładem Holenderskim (*Dutch Book*).[5] Przyjęcie takiego systemu zakładów jest zaś przejawem nieracjonalności. Argument ten dowodzi także, iż podmiot nie jest narażony na Zakład Holenderski wtedy i tylko wtedy, gdy jego stopnie przekonań są zgodne z aksjomatami rachunku prawdopodobieństwa.

Ramsey oraz de Finetti przedstawili argument z Zakładu Holenderskiego osobno dla poszczególnych aksjomatów rachunku prawdopodobieństwa zaproponowanych przez Kołmogorova. W tym miejscu należy zaznaczyć, iż chodzi tutaj o aksjomaty z pierwszej części *Grunbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung* Kołmogorova, tj. aksjomaty dla skończonych zbiorów zdarzeń. Aksjomatyczną definicję prawdopodobieństwa dla skończonych zbiorów zdarzeń można przedstawić następująco.[6] Niech Ω będzie niepustym zbiorem (przestrzenią zdarzeń), a M klasą podzbiorów[7] z Ω. Prawdopodobieństwem P nazywamy funkcję P: $M \rightarrow [0,1]$ spełniającą następujące aksjomaty:

(1) Dla każdego zdarzenia $E \in M$ prawdopodobieństwo $P(E)$ jest liczbą nieujemną: $P(E) \geq 0$.

(2) Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego Ω jest równe jedności: $P(\Omega) = 1$.

(3) (Skończona addytywność prawdopodobieństwa).

---

[4] Termin koherencja został wprowadzony przez de Finettiego. Ramsey posługiwał się terminem niesprzeczności i twierdził, iż prawa prawdopodobieństwa są prawami niesprzeczności.

[5] Lehman charakteryzuje Zakład Holenderski w ten oto sposób: *If a bettor is quite foolish in his choice of the rates at which he will bet, an opponenet can win money from him no matter what happens ... Such a losing book is called by [bookmakers] a "dutch book"* (R. S. Lehman, *On Confirmation and Rational Betting*, "The Journal of Symbolic Logic", 1955 nr 3 (20), s. 251).

[6] Aksjomaty prawdopodobieństwa przedstawiam za L. T. Kubik, *Rachunek prawdopodobieństwa*, Warszawa 1981, PWN, s. 37.

[7] Niepusta klasa podzbiorów M zbioru Ω nazywa się algebrą zbiorów, jeżeli spełnia następujące warunki: (1) $\Omega \in M$, (2) jeżeli A, B $\in M$, to $A \cup B \in M$, (3) jeżeli $A \in M$, to $\neg A = \Omega \setminus A \in M$, gdzie $\neg A$ jest dopełnieniem zbioru A. Każda algebra zbiorów M ma następujące własności: (4) $\varnothing = \neg\Omega \in M$, gdzie $\neg\Omega$ jest dopełnieniem zbioru Ω, (5) jeżeli A, B $\in M$, to $A \cap B \in M$, (6) jeżeli A, B $\in M$, to $A \setminus B \in M$; Por. M. Krzyśko, *Wykłady z teorii prawdopodobieństwa*, Warszawa 2000, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, s. 11.

Prawdopodobieństwo alternatywy skończonej liczby parami wyłączających się zdarzeń jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń: jeżeli $E_1, E_2, \ldots \in M$, przy czym dla każdej pary wskaźników i, j ($i \neq j$) jest $E_i \cap E_j = \emptyset$, to dla każdego n:

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) = \sum_{k=1}^{n} P(E_k) .$$

Przyjrzyjmy się argumentowi z Zakładu Holenderskiego dla trzeciego z aksjomatów, tj. dla aksjomatu skończonej addytywności.[8] Mówi on, iż podmiot nie jest narażony na pewną przegraną wtedy i tylko wtedy, gdy jego stopnie przekonań spełniają aksjomat skończonej addytywności, tj. wtedy, gdy suma złożona ze stopnia przekonania o zajściu zdarzenia E_1 oraz ze stopnia przekonania o zajściu zdarzenia E_2 jest równa stopniowi przekonania o zajściu zdarzenia E_1 lub zdarzenia E_2. Załóżmy, iż podmiot *X* chce zmierzyć stopień przekonania podmiotu *Y* o tym, że zajdzie zdarzenie *E*. W tym celu *X* proponuje *Y* przystąpienie do zakładu na następujących warunkach: podmiot *Y* musi wybrać iloraz zakładu *q*, że zajdzie zdarzenie *E* (tj. decyduje się, jaki jest jego stopień przekonania o tym, że zajdzie *E*) i następnie podmiot *X* wybiera stawkę *S*. Podmiot *Y* płaci podmiotowi *X* qS w zamian za to, że wygra *S*, jeśli zajdzie zdarzenie *E*. Wykażmy najpierw, iż jeśli podmiot *Y* jest narażony na pewną przegraną niezależnie od wyniku zakładu, to jego stopnie przekonań nie spełniają aksjomatu skończonej addytywności. Zgodnie z naszym założeniem podmiot *Y* wybiera ilorazy zakładu $q_1, \ldots, q_n$, a podmiot *X* wybiera stawki $S_1, \ldots, S_n$. Jeśli zdarzenie E_i zajdzie, to wówczas wygrana podmiotu *X* oznaczana jako G_i może być przedstawiona za pomocą równania $G_i = q_1 S_1 + \ldots + q_n S_n - S_i$. Zatem jeśli podmiot *X* wybierze stawki w ten sposób, iż $S_1 = S_n = \ldots = S_n = S$, to wówczas jego wygrana może być przedstawiona równaniem $G_i = S(q_1 + \ldots + q_n - 1)$. Wynika z tego, iż (i) jeśli podmiot Y ustali sumę swoich ilorazów zakładu na większą niż 1, to podmiot X zawsze wygrywa, ustalając stawkę *S* na większą od 0, oraz (ii) jeśli podmiot *Y* ustali sumę swoich ilorazów zakładu na mniejszą od 1, to X zawsze wygrywa, ustalając stawkę *S* na mniejszą od 0. Podmiot *Y* chcąc uniknąć pewnej przegranej, powinien ustalić sumę swoich ilorazów zakładów jako równą 1, czyli spełnić skończoną addytywność.

Wykażmy z kolei, iż jeśli stopnie przekonań podmiotu *Y* spełniają aksjomat skończonej addytywności, to podmiot ów nie jest narażony na pewną przegraną. Zatem, załóżmy, iż ilorazy zakładu podmiotu *Y* są skończenie addytywne, tj. $q_1 + \ldots + q_n = 1$. Z równania $G_i = q_1 S_1 + \ldots + q_n S_n - S_i$ otrzymujemy zatem $q_i G_i = q_i (q_1 S_1 + \ldots + q_n S_n) - q_i S_i$. Sumując przez *i*, otrzymujemy z równania $q_i G_i = q_i (q_1 S_1 + \ldots + q_n S_n) - q_i S_i$ równanie postaci $q_1 G_1 + q_2 G_2 + \ldots + q_n G_n = 0$. Równanie to pokazuje, iż nie wszystkie wygrane X mogą mieć wartość dodatnią. Dlaczego? Otóż, jeśli

[8] Argument ten przedstawiam w oparciu o D. Gillies, *Philosophical Theories of Probability*, London 2003, Routledge, s. 61.

wszystkie wygrane G_i miałyby mieć wartość dodatnią większą od 0, to wówczas $q_1G_1 + q_2G_2 + \ldots + q_nG_n > 0$. Jeśli zaś nie wszystkie wygrane *X* mają wartość dodatnią, to *Y* nie jest narażony na pewną przegraną.

Zilustrujmy ten w dużym stopniu abstrakcyjny argument konkretnym przykładem. Załóżmy, iż podmiot X oferuje następujące ilorazy dla trzech zakładów: pierwszy (*p*) 30$ za tym, iż w 2009 roku nagrodę Nobla z fizyki zdobędzie Polak, przy stawce do wygrania 100$, drugi (*q*) 60$ za tym, iż w 2009 roku będzie w Polsce obowiązywała waluta euro, przy stawce do wygrania 100$ oraz trzeci ($p \vee q$) 100$ za tym, iż w 2009 roku nagrodę Nobla z fizyki zdobędzie Polak lub w 2009 roku będzie w Polsce obowiązywała waluta euro, przy stawce do wygrania 100$. Ilorazy zakładów podmiotu *X* nie spełniają zatem aksjomatu skończonej addytywności, ponieważ $p + q < (p \vee q)$, choć wydają się racjonalne. Argument z Zakładu Holenderskiego implikuje, iż w takiej sytuacji podmiot X poniesie przegraną niezależnie od tego, które ze zdarzeń się spełni. Wystarczy, iż bookmacher zastosuje następującą strategię: sprzeda podmiotowi X trzeci zakład za 100$ oraz kupi pierwszy zakład za 30$ i drugi zakład za 60$. Wówczas jeśli żadne ze zdarzeń nie nastąpi, to podmiot X przegrywa 10$; jeśli zaś w 2009 roku Polak zdobędzie nagrodę Nobla z fizyki lub w 2009 będzie obowiązywać w Polsce waluta euro, to zysk podmiotu X wynoszący 100$ jest równoważony sumą 100$, za jaką kupił on trzeci zakład i traci 10$ z pierwszego i drugiego zakładu.

Argument z Zakładu Holenderskiego działa podobnie dla dwóch pozostałych aksjomatów rachunku prawdopodobieństwa. Argument ten uzasadnia probabilistyczną koherencję stopni przekonań, a tym samym aksjomatyczną definicję prawdopodobieństwa, przy założeniu, iż algebra *F* określona na Ω jest zbiorem skończonym.

2. PRZELICZALNA ADDYTYWNOŚĆ I *LOTERIA DE FINETTIEGO*

Klasyczna teoria prawdopodobieństwa rozwijana m.in. przez Laplace'a oraz Jakuba Bernoulliego mówiła tylko o skończonych przestrzeniach możliwych zdarzeń. Słynna klasyczna definicja prawdopodobieństwa zdarzenia E, jako stosunku przypadków sprzyjających zajściu zdarzenia do wszystkich przypadków, mówi tylko o skończonych przestrzeniach przypadków. Dopiero na początku XX wieku o nieskończonych przestrzeniach możliwych zdarzeń pisał Emile Borel.[9] W drugiej części *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung* Kołmogorov wprowadził rozszerzenie aksjomatu skończonej addytywności na nieskończone przestrzenie zdarzeń. Rezultatem tej operacji było wprowadzenie przez niego pojęcia σ-algebry *F*[10], a w kon-

---

[9] Por. J. von Plato, *Creating Modern Probability*, Cambridge 1994, Cambridge University Press, s. 16.

[10] Klasa *F* podzbiorów zbioru Ω nazywa się σ-algebrą, jeżeli jest algebrą (tj. spełnia warunki podane w przypisie (7) oraz ma własności podane w przypisie (7)) i ponadto spełnia warunek: (2')

sekwencji zastąpienie aksjomatu skończonej addytywności przez aksjomat przeliczalnej addytywności o postaci:

(3') jeżeli E_k jest ciągiem takich zdarzeń należących do F, że $E_i \cap E_j = \varnothing$ dla ($i \neq j$), to:

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(E_k).$$

Kołmogorov był świadomy, iż podanie empirycznego znaczenia aksjomatu przeliczalnej addytywności jest prawie niemożliwe, gdyż w praktyce mamy do czynienia ze skończoną ilością zdarzeń oraz z rozkładem prawdopodobieństwa na skończonych przestrzeniach zdarzeń:

> Since the new axiom is essential for infinite fields of probability only, it is almost impossible to elucidate its empirical meaning, as has been done for example, in the case of Axioms I-V in §2 of the first chapter. For, in describing any observable random processes we can obtain only finite fields of probability. Infinite fields of probability occur only as idealised models of real random processes (Kołmogorov, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung*, Berlin 1933, Springer, s. 15).

Głównym uzasadnieniem, jakie Kołmogorov znalazł dla aksjomatu przeliczalnej addytywności, była jego użyteczność matematyczna, podobna do tej, jaką aksjomat ten pełni w matematycznej teorii miary.[11] Szczególnie istotna matematycznie jest rola tego aksjomatu w dowodzeniu niektórych twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa, np. mocnego prawa wielkich liczb sformułowanego w 1917 roku przez Francesco Cantelliego.

Uzasadnienie Kołmogorova dla przeliczalnej addytywności spotkało się z ostrą krytyką de Finettiego:

> [The assumption of countable additivity] is the one most commonly accepted at present; it had, if not its origin, its systematization in Kolmogorov's axioms (1933). Its succes owes much to the mathematical convenience of making the caclulus of probability merely a translation of modern measure theory…. No-one has given a real justification of countable additivity (other than just taking it as a 'natural extension' of finite additivity (De Finetti, *Theory*…, s. 119).

Zarzut de Finettiego opiera się na założeniu, iż nie powinno się wprowadzać nowych aksjomatów rachunku prawdopodobieństwa tylko na podstawie matematycznej konwencji. Aksjomaty powinny mieć znaczenie uniwersalne i powinny znaleźć uzasadnienie na gruncie interpretacji prawdopodobieństwa. Przeliczalna addytywność nie znajduje zaś uzasadnienia na gruncie subiektywnej interpretacji prawdopodo-

---

jeżeli $A_n \in F$, dla n = 1, 2, …, to $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$.

Każda σ-algebra F ma następującą własność: (5') jeżeli $A_n \in F$, dla n = 1, 2, …, to $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F$; Por. M. Krzyśko, *Wykłady*..., s. 12.

[11] Por. J. von Plato, *Creating...,* s. 228-230.

bieństwa. Dlaczego? Głównym kontrargumentem jest tak zwana *loteria de Finettiego*, która ma obrazować rozkład prawdopodobieństwa na przeliczalnie nieskończonych zdarzeniach, takich jak chociażby wylosowanie dowolnej liczby naturalnej.

Zdaniem de Finettiego możemy wyobrazić sobie loterię z nieskończoną przeliczalnie liczbą losów *n*, takich że każdy los *n* odpowiada dodatniej liczbie całkowitej. Przyjmujemy, iż wszystkie losy mają równe prawdopodobieństwo wygranej. Wobec tego rozkład prawdopodobieństwa jest jednolity lub też — mówiąc językiem subiektywisty — dla każdego losu dysponujemy równymi ilorazami zakładu. Jednakże założenie jednolitego rozkładu prawdopodobieństwa oraz założenie aksjomatu przeliczalnej addytywności nie mogą zostać jednocześnie spełnione. Przyjrzyjmy się bowiem dwóm możliwym scenariuszom. Po pierwsze, nasz jednolity rozkład prawdopodobieństwa przypisuje każdemu losowi *n* prawdopodobieństwo równe 0 ($p_n = 0$). Oznacza to, iż suma prawdopodobieństw wygranej przeliczalnej liczby losów jest równa 0 ($\sum_{n=1}^{\infty} P(\mathrm{E_n}) = 0$). Po drugie, nasz jednolity rozkład prawdopodobieństwa przypisuje każdemu losowi *n* jakąś jednakową liczbę dodatnią, np. ¼, ½. Konsekwencją tego rozkładu jest to, iż suma prawdopodobieństw wygranej przeliczalnej liczby losów jest większa od 1 ($\sum_{n=1}^{\infty} P(\mathrm{E_n}) > 1$). Oba możliwe scenariusze loterii implikują fakt, iż funkcje posyłające podzbiory nieskończonej przestrzeni złożonej z losów w przedział [0,1] nie są funkcjami prawdopodobieństwa. Przyjmując niepodważalną rolę założenia o jednolitym rozkładzie prawdopodobieństwa, de Finetti odrzuca aksjomat przeliczalnej addytywności jako prowadzący do niedających się zaakceptować konsekwencji. Zdaniem de Finettiego subiektywista powinien przyjąć tylko skończoną addytywność jako jeden z wymogów dla swoich stopni przekonań.

3. CZEGO DOWODZI *LOTERIA DE FINETTIEGO*?

Czy *loteria de Finettiego* pokazuje rzeczywiście niemożliwość uzasadnienia aksjomatu przeliczalnej addytywności na gruncie subiektywnej interpretacji prawdopodobieństwa? Odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Zauważmy bowiem, iż de Finetti nie wykazał teoretycznej niemożliwości uzasadnienia przeliczalnej addytywności za pomocą środków podobnych do tych, jakimi sam uzasadniał pozostałe aksjomaty prawdopodobieństwa, tj. za pomocą argumentu z Zakładu Holenderskiego. Istotą stanowiska de Finettiego było pokazanie, iż w określonej sytuacji ilustrowanej postawieniem pieniędzy na jeden z losów z nieskończenie przeliczalnej ich liczby, pogodzenie *a priori* uzasadnionego dla de Finettiego założenia o jednolitym rozkładzie prawdopodobieństwa oraz aksjomatu przeliczalnej addytywności jest niemożliwe. Innymi słowy, aksjomat przeliczalnej addytywności nie jest neutralny wobec pewnych rozkładów prawdopodobieństw w pewnych szczególnych sytuacjach, a wobec tego, nie powinien być przyjmowany jako aksjomat rachunku prawdopodobieństwa i tym samym uniwersalny wymóg składający się na koherencję stopni przekonań.

Strategia de Finettiego, oprócz tego, iż nie jest ona w swej istocie strategią subiektywisty, może w prosty sposób prowadzić do odrzucenia pozostałych aksjomatów rachunku prawdopodobieństwa. Jak zauważa Frederick Schick, istnieją takie sytuacje, w których jest całkiem racjonalne, że stopień przekonania dla alternatywy zdań $p \vee q$ jest różny od sumy stopnia przekonania osobno dla p i stopnia przekonania osobno dla q.[12] Zatem, stosując konsekwentnie strategię de Finettiego powinniśmy odrzucić także aksjomat skończonej addytywności, który, jak pokazaliśmy powyżej, jest uzasadniony argumentem z Zakładu Holenderskiego.

4. MOŻLIWE STRATEGIE SUBIEKTYWISTY

Fakt możliwości uzasadnienia przeliczalnej addytywności za pomocą argumentu z Zakładu Holenderskiego implikuje co najmniej dwie możliwe strategie dla subiektywisty:

(1) można uzasadnić przeliczalną addytywność za pomocą argumentu z Zakładu Holenderskiego, nie podważając przy tym zasadności *loterii de Finettiego*.

(2) można uzasadnić przeliczalną addytywność za pomocą argumentu z Zakładu Holenderskiego oraz podważyć tym samym zasadność loterii de Finettiego poprzez wykazanie nieracjonalności założenia o jednolitym rozkładzie prawdopodobieństwa.

Zastosowanie pierwszej strategii, widoczne chociażby w pracy Ernesta Adamsa[13], oraz bronione ostatnio przez Paula Barthę,[14] jest w pewnym sensie zaproponowaniem „trzeciej drogi” między zwolennikami przyjęcia aksjomatu przeliczalnej addytywności, a zwolennikami stanowiska de Finettiego. Konsekwencją jej jest jednakże uznanie przeliczalnej addytywności jako niekoniecznego wymogu składającego się na koherencję stopni przekonań. Musimy bowiem zaakceptować możliwość odrzucenia przeliczalnej addytywności w sytuacjach podobnych do tych ilustrowanych przez *loterię de Finettiego*. Przyjęcie takiej strategii stawia jej zwolenników przed następującym problemem: skoro wystarczającym środkiem do uznania aksjomatów prawdopodobieństwa jako uniwersalnych wymogów koherencji jest argument z Zakładu Holenderskiego, to dlaczego nie działa on w pełni w przypadku przeliczalnej addytywności? Trudności rozwikłania tego problemu nie przesłania fakt, iż zwolennicy tej strategii podnoszą możliwość szerokiego zakresu stosowania aksjo-

---

[12] Por. F. Schick, *Dutch Bookies and Money Pumps*, „The Journal of Philosophy”, 1986 nr 2 (82), s. 112-119.

[13] Por. E. Adams, *On Rational Betting Systems*, „Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung”, 1964 nr 6, s. 7-29.

[14] Por. P. Bartha, *Countable Additivity and the de Finetti Lottery*, „British Journal for the Philosophy of Science”, 2004 nr 2 (55), s. 301-321.

matu przeliczalnej addytywności w różnych filozoficznych teoriach korzystających z subiektywnej interpretacji prawdopodobieństwa.[15]

Trudności pierwszej strategii unika druga reprezentowana w szczególności przez Jona Williamsona.[16] Zobaczmy zatem, na czym ta strategia polega oraz czy nie wikła się ona w inne teoretyczne i praktyczne problemy?

5. STRATEGIA WILLIAMSONA

Strategia Williamsona zmierza nie tylko do uzasadnienia przeliczalnej addytywności za pomocą argumentu z Zakładu Holenderskiego, lecz także do osłabienia argumentu z *loterii de Finettiego* poprzez wykazanie nieracjonalności założenia jednolitego rozkładu prawdopodobieństwa. Zatem argument Williamsona z Zakładu Holenderskiego dla przeliczalnej addytywności ma spełnić co najmniej dwa cele:

(1) uzasadnić na gruncie subiektywnej interpretacji, iż stopnie przekonań, aby były koherentne (racjonalne), muszą spełniać aksjomat przeliczalnej addytywności,

(2) pokazać, iż jednolity rozkład prawdopodobieństwa w sytuacji ilustrowanej *loterią de Finettiego* prowadzi do pewnej przegranej zakładającego się podmiotu.

W celu wprowadzenia argumentu z Zakładu Holenderskiego dla przeliczalnej addytywności Williamson zakłada, iż:

(1) $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ jest zbiorem wzajemnie wykluczających się i dopełniających się zdań. Williamson operuje zatem na zdaniach, a nie na zdarzeniach,

(2) $q = bel(a_i)$, gdzie q jest ilorazem zakładu, a $bel(a_i)$ jest stopniem przekonania o prawdziwości zdania a_i, dla $i = 0, 1, 2, \dots$,

(3) $\Delta_i\, \Theta_i$ jest stawką odpowiadającą ilorazowi zakładu q, dla $i = 0, 1, 2, \dots$, gdzie $\Delta_i = \pm 1$ jest kierunkiem stawki (odmiennym przy sprzedaży i kupnie zakładu), a $\Theta_i \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ jest wielkością liczbową,

(4) $L_k = \sum_{i=0}^{\infty} q_i\, \Delta_i\, \Theta_i - \Delta_k\, \Theta_k$ jest przegraną podmiotu, jeśli zdanie a_k okaże się prawdziwe,

(5) przedmiotem stawki jest skończona ilość pieniędzy, która jest równoważna założeniu $|L_k| < \infty$, dla każdej liczby naturalnej k,

(6) $|L_k| < \infty$, dla każdej liczby naturalnej k, jest równoważne założeniu **C:** $\left| \sum_{i=0}^{\infty} q_i\, \Delta_i\, \Theta_i \right| < \infty$.

[15] Bartha akcentuje w szczególności przydatność aksjomatu przeliczalnej addytywności na gruncie bayesiańskiej teorii konfirmacji.

[16] Por. J. Williamson, *Countable Additivity and Subjective Probability*, „British Journal for the Philosophy of Science”, 1999 nr 3 (50), s. 401-416.

Dodajmy jeszcze, iż szereg $\sum_{i=0}^{\infty} q_i\, \Delta_i\, \Theta_i$ jest szeregiem zbieżnym, tj. $\lim_{n\to\infty} q_i\, \Delta_i\, \Theta_i = 0$.

Przedstawmy następnie argument z Zakładu Holenderskiego dla przeliczalnej addytywności jako konieczność udowodnienia następującej równości:

$$\mathrm{L}_k \leq 0 \text{ dla pewnego } k \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} q_i = 1.$$

Równość ta mówi, iż podmiot nie jest narażony na przegraną wtedy i tylko wtedy, gdy jego ilorazy zakładów są przeliczalnie addytywne.

Przedstawmy najpierw argument z Zakładu Holenderskiego dla implikacji mówiącej, iż jeżeli podmiot nie jest narażony na pewną przegraną, to jego ilorazy zakładów są przeliczalnie addytywne, tj. $\mathrm{L}_k \leq 0$ dla pewnego $k \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} q_i = 1$:

Załóżmy, iż $\sum_{i=0}^{\infty} q_i < 1$. Wtedy dla każdego $i \in \mathbf{N}$ niech $\Delta_i\, \Theta_i = \Delta\Theta$ będzie stałą wielkością, gdzie $\Delta = \pm 1$ i $\Theta \in \mathbf{R}_{?0}$. Zachodzi wówczas także warunek **C**, gdyż:

$$|\sum_{i=0}^{\infty} q_i\, \Delta_i\, \Theta_i\, | = |\Delta\Theta|\, |\sum_{i=0}^{\infty} q_i| = \Theta \sum_{i=0}^{\infty} q_i < \Theta < \infty.$$

Po podstawieniu uzyskujemy $\mathrm{L}_k = \sum_{i=0}^{\infty} q_i \Delta\, \Theta - \Delta\Theta$, co jest równe $\Delta\Theta \sum_{i=0}^{\infty} q_i - 1$. Następnie ustawiając kierunek stawki na –1, otrzymujemy $\mathrm{L}_k > 0$, dla każdego $k \in \mathbf{N}$, a więc pewną przegraną.

Można zauważyć, iż argument powyższy ma charakter argumentu opartego na regule *modus tollens*:

$$L_k \leq 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} q_i = 1$$

$$\neg(\sum_{i=0}^{\infty} q_i = 1)$$

$$\therefore\ \neg(L_k \leq 0)$$

Dla udowodnienia implikacji stanowiącej, iż jeżeli ilorazy zakładów są przeliczalnie addytywne, to podmiot nie jest narażony na pewną przegraną, tj. $\sum_{i=0}^{\infty} q_i = 1 \Rightarrow \mathrm{L}_k \leq 0$ dla pewnego k, załóżmy za Williamsonem, że $\sum_{i=0}^{\infty} q_i = 1$. Wtedy możemy w następujący sposób wykazać, iż suma iloczynów przeliczalnych ilorazów zakładów oraz porażek podmiotu jest równa 0:

$\sum_{i=0}^{\infty} q_i L_i = \sum_{i=0}^{\infty} q_i \, [\sum_{j=0}^{\infty} q_j \, \Delta_j \, \Theta_j - \Delta_i \, \Theta_i]$ (z definicji L_i) $= \sum_{i=0}^{\infty} q_i \sum_{j=0}^{\infty} q_j \, \Delta_j \, \Theta_j - \sum_{i=0}^{\infty} q_i \, \Delta_i \, \Theta_i$ (wykorzystując warunek **C**) $= 1 \sum_{j=0}^{\infty} q_j \, \Delta_j \, \Theta_j - \sum_{i=0}^{\infty} q_i \, \Delta_i \, \Theta_i = 0$ (z faktu, iż $\sum_{i=0}^{\infty} q_i = 1$ oraz z odejmowania szeregów zbieżnych).

Następnie, korzystając z faktu, iż dla pewnego $k \in \mathbf{N}$, $q_k > 0$ i $q_i \geq 0$, otrzymujemy, iż $L_k \leq 0$.

Zdaniem Williamsona argument z Zakładu Holenderskiego wykazuje dodatkowo w prosty sposób nieracjonalność założenia o jednolitym rozkładzie prawdopodobieństwa w sytuacji *loterii de Finettiego*. Jeśli bowiem jednolity rozkład prawdopodobieństwa prowadzi do naruszenia przeliczalnej addytywności, to podmiot narażony jest na pewną przegraną, a więc jest nieracjonalny. W miejsce jednolitego, ale nie przeliczalnie addytywnego, rozkładu prawdopodobieństwa w sytuacjach analogicznych do *loterii de Finettiego* Williamson proponuje niejednolity, ale przeliczalnie addytywny rozkład prawdopodobieństwa. Konieczność takiego rozkładu wynika wprost z konieczności uniknięcia pewnej przegranej przez racjonalnego gracza. Jak podkreśla Williamson, żadna racjonalnie myśląca osoba podejmująca się gry w ruletkę nie postawi tej samej stawki na wszystkie numery, ponieważ niezależnie od tego, który z nich okaże się zwycięski, osoba ta na pewno poniesie porażkę.[17] Jedynym problemem jest jednakże wybór tych losów, które będą traktowane inaczej niż pozostałe. Jedną ze wskazówek może być fakt, iż w praktyce nie myślimy o losach odpowiadających liczbie 10^{10}.[18]

Czy argument Williamsona rzeczywiście wykazał, iż przeliczalna addytywność powinna być traktowana przez subiektywistów tak samo jak pozostałe aksjomaty rachunku prawdopodobieństwa? Jeśli uznajemy, iż głównym założeniem subiektywnej interpretacji jest utożsamianie stopni przekonań z liczbowo wyrażanymi ilorazami zakładu oraz stosowanie argumentu z Zakładu Holenderskiego dla uzasadnienia aksjomatów rachunku prawdopodobieństwa, to wówczas strategia Williamsona pozwala traktować przeliczalną addytywność tak jak pozostałe aksjomaty rachunku prawdopodobieństwa. *Loteria de Finettiego* zaś godząc w aksjomat przeliczalnej addytywności, podważa normatywne podstawy subiektywnej interpretacji, a tym samym uzasadnienie dla pozostałych aksjomatów rachunku prawdopodobieństwa.

---

[17] Por. J. Williamson, *Countable*..., s. 412.
[18] Por. J. Williamson, *Countable*..., s. 409.

5. KONKLUZJE

W niniejszym artykule starałem się wykazać, iż aksjomat przeliczalnej addytywności, często uznawany za matematyczną konwencję przydatną w dowodzeniu ważnych twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa, znajduje uzasadnienie na gruncie subiektywnej interpretacji prawdopodobieństwa. Jak wykazuje Williamson, aksjomat ten można uzasadnić argumentem z Zakładu Holenderskiego tak jak pozostałe aksjomaty rachunku prawdopodobieństwa. Uznanie zaś argumentu z *loterii de Finettiego* za konkluzywny prowadzi do poważnych niespójności na gruncie subiektywnej interpretacji prawdopodobieństwa.